

1. INTRODUÇÃO

Escreveu Max Planck (1858-1947):

«Desde sempre, e até sempre, o maior objectivo da Física é a resolução do problema geral que abarque todos os fenómenos naturais, os já observados e aqueles que ainda estão por observar, com base num Princípio simples que satisfaça todos as necessidades de cálculo (...) Acontece que, pela natureza das coisas, este propósito não foi ainda nem virá a ser alcançado (...) Contudo, é possível aproximarmo-nos cada vez mais deste objectivo e a história da Física Teórica mostra já existirem resultados importantes neste sentido (...) De entre todas as leis físicas, o Princípio da Menor Acção (...) é um daqueles princípios que, pela sua forma e conteúdo, pode ser considerado como aquele que mais se aproximou deste objectivo (...)»¹.

O Princípio da Menor Acção ou, mais apropriadamente, os princípios de acção estacionária, onde se aplica o cálculo variacional, têm um lugar de destaque particular na descrição física da natureza. Estes princípios surgem da suposição que os fenómenos naturais podem ser matematicamente descritos por um processo de minimização (ou sendo mais preciso, de estacionaridade – máximo ou mínimo) de uma determinada grandeza física. Sabe-se que todo o processo de cálculo é complexo, envolve grande detalhe analítico, e ele próprio, numa relação de cumplicidade mútua, esteve sempre associado à própria descoberta deste princípio.

A ideia que a natureza segue um princípio de esforço mínimo e que nada faz em vão, que poupa e economiza em todos os seus processos, é uma ideia bastante antiga que, desde há milénios, se procurou transportar para os domínios de descrição das leis naturais. Foi o que fez Herão de Alexandria para explicar a igualdade entre os ângulos de reflexão e de incidência da luz. O Quadro 1.1 resume uma lista cronológica de algumas das principais contribuições em princípios variacionais ou de extremo *lato sensu* aplicados à Física. De entre todos estes princípios, talvez até pela importância que viria a assumir nesta disciplina, aquele que levantou uma maior celeuma foi o Princípio da Menor Acção, inicialmente formulado por Maupertuis. Planck justifica a importância deste princípio e, no mesmo ensaio, escreve

¹ (PLANCK, 1960: 69).

«(...) o seu significado, devidamente entendido, estende-se, não só aos processos mecânicos, mas também aos problemas termodinâmicos e electrodinâmicos (...) em todos os domínios da ciência em que é aplicado, dá, não só uma explicação de certas características do fenómeno tal como existe, mas fornece também as regras pelas quais as suas variações no tempo e no espaço podem ser completamente determinadas (...)»².

QUADRO 1.1

Autor	Princípio de extremo
Herão de Alexandria	A luz segue o percurso mais curto em meios homogéneos (reflexão)
Ibn Haytham	A luz segue o caminho mais fácil (menos resistente)
Fermat	Princípio do tempo mínimo (reflexão e refração)
Leibniz	A luz segue o caminho mais fácil (menos resistente)
Maupertuis (1744)	Princípio da Menor Acção: a luz segue o percurso que torna menor essa quantidade
Euler (1744) Lagrange	Princípio da Menor Acção: aplicado a sistemas mecânicos de energia constante
Carnot	No seu <i>Essai sur les machines en général</i> deduz que: « De todos os movimentos que aparecerão depois da acção, o movimento geométrico, tal que a soma dos produtos de cada uma das massas pelo quadrado da velocidade que perderá, é um mínimo» ³
Gauss (1829)	Princípio do Menor Constrangimento: aplicação à Estática.
Hamilton (1834)	Princípio de Hamilton: Aplicação à Óptica e à Mecânica
Hertz	Princípio da Menor Curvatura
Einstein & Hilbert	Princípio Variacional aplicado à relatividade geral
De Broglie (1923)	Reunificação do Princípio de Fermat e do Princípio de Maupertuis para as ondas de matéria
Feynman (1948)	Princípio Variacional generalizado à Mecânica Quântica

Pode afirmar-se que, embora de nascimento difícil, os primeiros passos do Princípio da Menor Acção não suscitaram diatribes violentas, foi maior a desconfiança, e talvez alguma indiferença, do que a violência. A polémica violenta ocorrida na Academia de Berlim, com foros de drama passionai onde só faltaram, para a época, duelos de desafiante, mas onde houve prisões, fugas e panfletos anónimos bastante cáusticos, opôs alguns matemáticos e apaixonou alguns académicos, mas os ataques e as palavras duras passaram claramente ao lado da argumentação científica: a querela desenvolveu-se mais numa atmosfera de ataque pessoal, com contornos ideológicos, do que científica. Uma polémica – ainda hoje abundantemente referida – que acabou por ficar célebre, não pela

² (*ibid.*: 69).

³ In (BRUNET, 1938: 93).

discussão filosófico-científica, mas pela intervenção pública e contundente de um dos espíritos mais brilhantes da Europa das Luzes do século XVIII – Voltaire.

Se a polémica berlinense representa o culminar dos «duros combates» em torno do Princípio da Menor Acção, sobretudo em volta de uma certa mensagem metafísica nele contida, ela representa também o alvor da sua afirmação filosófico-científica ou o início do período da sua edificação matemática, o que corresponde à perda progressiva do epíteto de «metafísico», no sentido pejorativo. É na Academia de Berlim que confluem duas percepções deste princípio, a saber: o Princípio da Menor Acção, enquanto enunciado, talvez um pouco obscuro, que fundamenta uma percepção global do comportamento da natureza ditada pela vontade de um «Ser Superior», criador e organizador de todo o universo – ou o conteúdo eminentemente metafísico deste princípio; o Princípio da Menor Acção, um princípio cujo enunciado se pode deduzir como consequência das leis básicas da mecânica, sujeito a uma formulação matemática rigorosa, embora sempre permissivo a uma leitura teleológica– ou o conteúdo eminentemente físico deste princípio, destacando-se aqui o papel de Euler e Lagrange. D’Alembert atacará a mensagem metafísica do Princípio da Menor Acção e defenderá a sua natureza «necessária» ou demonstrável.

Em torno deste princípio, explícita ou implicitamente, há intervenções de todos os grandes espíritos da filosofia natural da época, isto é, dos séculos XVII e XVIII. Nomeam-se aqui os mais destacados e aqueles que mais se destacaram na sua defesa ou no seu ataque: Pierre de Fermat (1601-1665); René Descartes (1596-1650); Christian Huyghens (1629-1695); Isaac Newton (1642-1727); Gottfried Leibniz (1646-1716); Jaime Bernoulli, (1654-1705); João (I) Bernoulli, (1667-1748); Pierre-Louis de Maupertuis (1698-1759); Samuel Koenig (1712-1757); Leonard Euler (1707-1783); Daniel Bernoulli (1700-1782); Voltaire (François-Marie Arouet) (1694-1778); Jean D’Alembert (1717-1783); Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Os seus antecedentes modernos surgiram com Fermat ao demonstrar que, geometricamente, a lei da refração da luz obedece a um princípio de mínimo, isto é, o trajecto seguido pela luz é tal que o seu tempo é mínimo; de imediato a ideia de Fermat foi atacada pelos cartesianos que lhe lançaram o anátema de «princípio moral» retirando-lhe qualquer propósito de ser um «princípio físico» – é a partir daqui que começa o seu apedrejamento. Estabelece-se a primeira discussão, onde, por carta, começa por intervir o próprio Descartes, dando lugar, após a sua morte, ao confronto epistolar entre os seus seguidores e o próprio Fermat. É esta matéria que vai ser o objecto do Capítulo 2, que se intitulou Fermat e a polémica em torno da óptica.

Uma polémica que se começa a desenhar na rede de correspondentes estabelecida pelo Padre Mersenne (1588-1648), secretário da República das Letras que estabelece a primeira teia organizada de troca e discussão de ideias dos sábios e eruditos europeus interessados em desenvolver o conhecimento. É uma troca de opiniões através dos circuitos ainda fechados, conduzidos pelas relações de um árbitro cuja função não é vigiar

ou censurar ideias, mas encaminhar as páginas escritas para os interlocutores adequados. No século XVII esta troca epistolar vai impor-se como uma forma maior de alargar a comunicação e estabelecer um espaço que ultrapassa o privado: quem recebe a resposta, depois de a ter suscitado, tem a liberdade (parece que tacitamente consentida) de enviar a mensagem a quem melhor julga que pode estabelecer confronto ou suscitar novos comentários. Percebe-se que a relação entre Descartes e Fermat, via Mersenne, pelo tom dos intervenientes, não é das mais cordiais. A polémica entre Fermat e os discípulos de Descartes, embora não circulando através de um qualquer intermediário, corresponde ao confronto entre o matemático de Toulouse e a academia de cartesianos que colectivamente organiza as respostas. A troca de argumentos entre os dois campos estabeleceu-se sobretudo em torno do problema do valor relativo da velocidade da luz nos meios ópticos com valores diferentes de refrangência, enquanto meio de prova das assunções teóricas dos dois contendores. Contudo a fluidez do cálculo de Fermat – o rigor da sua álgebra já patenteava as primícias do que viria a ser o cálculo diferencial – deixa que fique no ar um princípio (na refração o raio luminoso percorre uma trajectória correspondente ao tempo mínimo) que abre as portas ao entendimento de uma espécie de comportamento íntimo da natureza sobre o qual Fermat afirmou que «não pretendo nem nunca pretendi ser confidente secreto da Natureza». Como apoio à exposição deste capítulo colocam-se três cartas, das que se consideram mais importantes na polémica (duas de Fermat e uma outra de Claude Clerselier (1614-1684), um cartesiano)⁴ e dois textos com o cálculo minucioso apresentado por Fermat⁵, mostrando como do seu princípio de mínimo se podia extrair a lei da refração de Snell.

Mas este funcionamento da natureza de acordo com um «mínimo» (ou «máximo»), simples hipótese matemática de Fermat, foi sendo, de tempos a tempos, lembrado: primeiro por Leibniz; depois por João(I) Bernoulli, já na viragem do século, ao utilizá-lo para resolver o problema da braquistócrona; e, por último, por Maupertuis e Euler. O contexto de crescimento deste princípio dentro da filosofia natural é marcado pelo debate entre, por um lado, o dinamismo newtoniano e, por outro, a defesa dos princípios de conservação – um dos aspectos mais em evidência na célebre controvérsia entre Leibniz e Samuel Clarke (1675-1729). A versão desta discussão para os fundamentos metafísicos da filosofia natural correspondia ao enfrentamento de dois pontos de vista: a sustentação de um «Deus relojoeiro», tal como o entendia Newton, em oposição à existência de uma «harmonia pré-estabelecida» determinada por uma «inteligência superior», defendida por Leibniz. Foi uma controvérsia que, passada além Mancha, se vai prolongar numa outra, agora aquém Mancha, que, por sua vez, continuará a opor newtonianos a leibnizianos, com a novidade de agora, no debate de ideias, os primeiros se aliarem aos

⁴ Cartas: CXII, CXIII, CXV (FERMAT, 1891 (II): 457-463, 464-472, 482-484).

⁵ (FERMAT, 1891 (I): 170-172, 173-179).

cartesianos – foi a querela das forças vivas. A Óptica e a Mecânica são os dois domínios da filosofia natural que suscitam aos filósofos maiores necessidades de resposta e por isso vão ser o campo eleito para a experimentação de novos métodos matemáticos.

Neste debate indirectamente intervêm Huyghens e a primeira geração dos Bernoulli (Jaime e João(I)) que filosoficamente se assumem cartesianos. Huyghens introduziu a conservação da *vis viva* e, com a teoria ondulatória na Óptica, confirmava as conclusões de Fermat quanto ao valor relativo da velocidade da luz nos meios de diferente refrangência. A participação dos Bernoulli em todo este problema revela-se altamente frutífera no campo da inovação matemática, afastando-se de considerações estritamente filosóficas, não obstante o mais novo dos irmãos ter sido um dos grandes contendores na polémica sobre a *vis viva*. Os Bernoulli foram os verdadeiros campeões dos novos métodos matemáticos na resolução de problemas físico-matemáticos; métodos que engendraram instrumentos de análise matemática que permitiram novas formulações analíticas da Mecânica. Há aqui uma relação dialéctica muito evidente entre todo o processo de cálculo e a elaboração de novas teorias ou o enunciado de novos princípios. Por outro lado, os irmãos Bernoulli, interlocutores privilegiados de Leibniz, foram os grandes responsáveis pelo ensino e pela difusão do novo tipo de análise matemática na Europa – o cálculo diferencial e integral –, o que os vai colocar como referências obrigatórias em matérias de física-matemática. São estas relações que são tratadas no Capítulo 3, entre Descartes e Newton, passando por Leibniz e não esquecendo os irmãos Bernoulli, a sobrevivência de um princípio de mínimo. A exposição é acompanhada por um artigo de Leibniz sobre a aplicação de um princípio de extremo à Óptica⁶ e pelos trabalhos dos irmão Bernoulli sobre a resolução matemática do problema da braquistócrona⁷.

Na França do primeiro quartel do século XVIII, no meio académico francês, respirava-se um ar impregnado de cartesianismo e foi exactamente nessa época que Pierre Louis de Maupertuis, matemático e astrónomo, jovem académico e frequentador assíduo dos cenáculos da República das Letras parisiense, visitou Londres e tomou contacto com o newtonianismo e os seus seguidores. Foi na Londres da Royal Society que se deve ter defrontado pela primeira vez com um importante problema geodésico que era a forma da Terra – o nosso planeta era uma esfera oblata, como afirmava Newton, ou prolata, como defendiam os discípulos de Descartes? O jovem académico regressa a Paris depois de ter respirado os vapores da atmosfera newtoniana, tomando sobre os seus ombros a tarefa de defender, em terras de pensamento cartesiano, as ideias do autor dos *Principia*.

Maupertuis vai envolver-se em duas tarefas importantes. A primeira, aquela que o obriga não só a dispendir maior energia, numa longa e permanente disputa académica com os seus opositores, como também a organizar um núcleo forte de apoiantes que

⁶ (LEIBNIZ, 1682: 185-190).

⁷ (BERNOULLI, 1697a: 206-211) e (BERNOULLI, 1697b: 211-217).

lhe vai permitir alargar a sua influência na Academia, diz respeito à obtenção de provas conclusivas sobre a forma da Terra. Deste combate saiu vitorioso e apto para voos maiores no mundo académico europeu – passados poucos anos era o senhor absoluto da Academia prussiana. A outra tarefa, a segunda, cronologicamente sucessora da primeira, tinha como propósito o encontrar um princípio que explicitasse uma inteligibilidade própria para o funcionamento da natureza – essa pré-determinação leibniziana – e que traduzisse também a intervenção permanente de uma vontade superior – uma espécie de vigilante imposto ao relojoeiro newtoniano. Eis o substracto do pensamento que levou Maupertuis a ser o primeiro autor do enunciado do Princípio da Menor Acção...

É ao pensamento e acção de Pierre-Louis de Maupertuis que se reserva o Capítulo 4, Maupertuis e o Princípio da Menor Acção (PMA) ou um novo princípio metafísico, e está acompanhado, na colectânea final, por dois ensaios do próprio Maupertuis onde se enuncia pela primeira vez o princípio que é o objecto deste estudo⁸.

O primeiro artigo de Maupertuis, do qual apresentamos a tradução, data de 1744, ano em que um dos mais ilustres matemáticos de sempre, discípulo de João (I) Bernoulli, Leonardo Euler, publicou em Lausana uma obra, que num dos seus aditamentos finais trata um problema similar à questão da «menor acção». Pode dizer-se que foi quase no contexto de uma descoberta simultânea que Euler, fustigado pela resolução geral de alguns problemas geométricos de extremos, encontrou soluções análogas para outros problemas físicos: existe uma grandeza que obedece a condições de mínimo (ou máximo) e de onde é possível extrair uma solução que, por comparação com os métodos já conhecidos, é correcta! Embora haja simultaneidade entre o enunciado de Maupertuis e o desenvolvimento matemático de Euler sobre o Princípio da Menor Acção, há que enfatizar a distinção entre a concepção metafísica e teleológica de princípio de acção geral da natureza, que imbuía o pensamento do primeiro, e a interpretação do segundo que se confina a uma entidade matemática característica dos sistemas mecânicos e cujos atributos não são extrapoláveis para a natureza em geral.

Maupertuis e Euler já se conheciam, não pessoalmente, mas epistolarmente e, entre eles, já tinham trocado obras publicadas. São dois homens de personalidades, formação e características bem diversas: o que o primeiro tem de mundano o segundo tem de avesso às futilidades da vida social. O primeiro era oriundo da nobreza francesa de província, militar da corte e frequentador dos salões literários parisienses, habituado aos galanteios e aos jogos de sedução dos cortesãos (cruzara-se com Voltaire e Madame du Chatelet (1706-1749) e fizera parte do seu círculo íntimo de amizades); o segundo era filho de um pastor protestante, habituado à vida regrada e recatada de uma pequena comunidade camponesa, não tem ambições em singrar na corte, habita numa cidade republicana onde os valores do protestantismo constituem a regra de comportamento dos cidadãos

⁸ (MAUPERTUIS, 1744: 417-426) e (MAUPERTUIS, 1746: 267-294).

(os Bernoulli são o seu círculo de relações mais próximo). Se Maupertuis se forma culturalmente em Paris, Euler beneficiou da sólida formação de matemática que adquiriu com o seu professor da Universidade de Basileia (o mais novo da primeira geração dos irmãos Bernoulli) e do ambiente de trabalho e cosmopolita de uma cidade nas margens de uma das principais artérias fluviais da Europa (o rio Reno). Estes dois homens vão encontrar-se em Berlim sob os auspícios de Frederico II da Prússia (1712-1786) e são eles que na prática dirigirão a Academia desta cidade durante cerca de dez anos. Euler vai desempenhar um papel relevante no estabelecimento das primeiras bases matemáticas do Princípio da Menor Acção. No Capítulo 5, Euler e o estabelecimento Matemático do PMA, tratar-se-á do trabalho de Euler na ligação entre este princípio e o seu trabalho de investigação matemática que será ilustrado pelo primeiro texto do matemático suíço relacionado com este tema: o Aditamento II – *De motu projectotum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando*, (*Como determinar o movimento dos projecteis em meio não resistente pelo método dos máximos e dos mínimos*) –, do livro intitulado *Methodus inveniendi lineas curvas Maxime Minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (*Método para encontrar as linhas curvas que gozam das propriedades de máximo ou mínimo*)⁹.

Em Berlim está Euler como director da classe de Matemática da Academia Prussiana cujo dirigente máximo é Pierre-Louis de Maupertuis, um Presidente que fora aconselhado a Frederico II por Voltaire quando o matemático francês estava no auge da sua fama de «achador do nosso planeta». E vai ser nos primeiros anos da década de cinquenta do século XVIII que um protegido do próprio Maupertuis acusará o seu protector de, em relação ao Princípio da Menor Acção, ter plagiado as ideias já expressas por Leibniz em carta. Em todo este processo envolveram-se a Academia de Berlim, o próprio Imperador, Euler e Voltaire, os amigos e os inimigos do Académico Presidente. Discutiram sobre matérias que pouco tinham a ver com conteúdo científico e que diziam mais respeito à honorabilidade, seriedade, inveja e vaidade de algumas das personagens nomeadas. Apesar de uma certa frivolidade das questões em causa, as intervenções dos contendores desta querela vão apaixonar as personagens da República das Letras e, em torno delas, exacerbar-se-ão algumas paixões. Este tema será abordado no Capítulo 6, a Academia de Berlim, palco de uma curiosa disputa em torno do Princípio da Menor Acção.

Voltaire vai ser um dos interventores nesta polémica, residia em Berlim e fazia parte do reduzido círculo de amigos do imperador. Desde a morte da marquesa de Chatelet que a sua presença em *Sans Souci* era uma constante e, em influência, junto do soberano, rivalizava com Maupertuis. Em Paris, os dois académicos franceses tinham sido amigos, pertenciam ao mesmo círculo e partilhavam o mesmo interesse pela filosofia

⁹ (EULER, 1744: 309-320).

newtoniana, factores que explicam a razão da indicação feita por Voltaire a Frederico II de que Maupertuis era o homem indicado para dar um novo alento à academia fundada, meio século antes, por Leibniz. E Voltaire vai tomar parte na polémica contra o Imperador e Maupertuis, fã-lo de uma forma aberta e contundente. É por causa desta intervenção que se apresenta, como texto de apoio, a célebre diatribe com o título *História do doutor Akakia e do nativo de Saint-Malo*, editada em 1753, cujo autor foi o corrosivo e implacável Voltaire¹⁰.

No século XVIII, em grande parte devido à iniciativa e actividade organizada das academias, a Mecânica e a Matemática, especialmente os seus métodos associados à geodesia e astronomia, vão estar sujeitos a grandes aperfeiçoamentos e a uma discussão sobre os seus fundamentos (reexaminam-se os conceitos de força e a natureza dos princípios da mecânica). Tem sentido saber as reacções da reduzida comunidade académica aos trabalhos feitos sobre o Princípio da Menor Acção e, em particular, o seu entendimento sobre a importância da polémica berlinense. No Capítulo 7, O balanço da disputa e algum debate havido em torno do Princípio da Menor Acção, analisar-se-ão estas questões.

Na Europa do século XVIII as matérias relacionadas com o Princípio da Menor Acção não atraem a discussão dos filósofos e as questões que a aplicação deste princípio colocava prendiam-se mais com os métodos de análise matemática do que com a compreensão física do problema. O seu conteúdo, ou interpretação, teleológico contaminam a maior parte da sua fundamentação, daí que se compreenda que a maior parte dos matemáticos e geómetras colocasse algumas reticências em reflectir sobre o seu significado. De qualquer modo um dos espíritos mais lúcidos da época, um militante da filosofia das luzes, d'Alembert, não se exime nas páginas da *Enciclopédia* a dedicar-lhe não só uma entrada, como também a tratá-lo nas suas implicações com outros temas da física e da matemática. Alguns destes textos que aparecem neste *Diccionario fundamentado sobre as ciências, as artes e os officios* são utilizados como textos de apoio deste capítulo¹¹.

Está-se à beira do fim da história: Euler continua em Berlim e Maupertuis, desgostoso e combatido pelos ataques de que fora alvo, ferido na sua vaidade e no seu orgulho, abandona a direcção efectiva da academia prussiana e, em pouco tempo, acabará por sucumbir à tuberculose que o minava há vinte anos. O Princípio da Menor Acção parecia ficar com ele, sepultado pela polémica, embora já tivesse sido alvo da exigência matemática imposta por Euler que procurara ser preciso nos conceitos empregues e não insistir nas interpretações metafísicas. É o aprofundamento do tratamento analítico dos problemas da mecânica que vai trazer de novo para a ribalta das comunicações académicas este

¹⁰ (VOLTAIRE, 1830a: 471-513).

¹¹ (DIDEROT & D'ALEMBERT (I), 1751: 119), (DIDEROT & D'ALEMBERT (III), 1751: 789) e (DIDEROT & D'ALEMBERT (IV), 1751: 294).

Princípio. Alguém afastado dos grandes centros, que não tem onde publicar, e, timidamente, por carta, comunica a Euler o resultado das suas reflexões, primeiro matemáticas e, depois, sobre este princípio aplicado à mecânica. É o que se trata no Capítulo 8, Lagrange e o Princípio da Menor Acção.

E o trabalho de Lagrange vai ser saudado por Euler e, ainda nos seus últimos anos de vida, por Maupertuis que propõe este jovem matemático para membro estrangeiro (correspondente) da Academia de Berlim, o que lhe abriu as portas para a consagração académica. Lagrange disputará com Euler alguns importantes prémios académicos e acabará por substituí-lo, dez anos depois, nas suas funções na Academia de Berlim. Após vinte anos em Berlim, trocará esta cidade por Paris onde publicará a sua primeira grande obra que é o tratado de *Mecânica Analítica*. Os contributos matemáticos de Euler, herdados da primeira geração dos Bernoulli e acompanhados pela segunda geração deste apelido (Daniel e João (II)), na formulação do Princípio da Menor Acção, constituem as grandes pontes para a construção lagrangeana. Lagrange desenvolveu um novo método para determinar os máximos e mínimos, o «cálculo das variações» assim denominado por Euler, que permite encontrar a formulação rigorosa do enunciado deste princípio enquanto princípio básico donde se pode extrair a resolução de qualquer problema da Mecânica. Era a vitória da longa marcha para a afirmação do Princípio da Menor Acção; uma vitória que, pela sua própria natureza, poderia ser considerada como uma vitória adiada e contem o travo de uma quase derrota...

Com a publicação, em 1788, da *Mécanique Analytique*, é reservado ao Princípio da menor acção um lugar absolutamente secundário no edifício lógico-dedutivo lagrangeano, reservando-se o lugar principal, as honras de grande princípio, ao Princípio das velocidades virtuais acompanhado pelo Princípio de d'Alembert da Dinâmica. Por esta razão apresenta-se neste capítulo como textos de apoio, as duas introduções históricas, escritas por Lagrange como capítulos iniciais da Estática e da Dinâmica na obra da *Mecânica Analítica*¹².

Conclusões não há, faz-se uma revisitação histórica final, aquilo que se chamou ao Capítulo 9, Epílogo provisório. Esta história chega ao fim com a « vitória na Mecânica Analítica», uma vitória de Pirro para o Princípio da Menor Acção, já que nesta obra de Mecânica Racional lhe foi reservado um lugar absolutamente subalterno... será preciso esperar mais uns anos (aproximadamente meio século) para que possa aspirar, como escreveu Planck, «à resolução do problema geral que abarque todos os fenómenos naturais».

¹² (LAGRANGE, 1788: 1-12) e (LAGRANGE, 1788: 158-189).

